государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Самарской области «Самарский колледж сервиса производственного оборудования имени Героя Российской Федерации Е.В. Золотухина»

Комплект контрольно-оценочных средств
по учебной дисциплине
Математика
ППССЗ по специальности
22.02.06 Сварочное производство

2017 г.

Одобрен
предметной - цикловой комиссией

Протокол №1
от «29» 02 2017г.

_______/Елшанская С.В. /

Утверждаю
Заместитель директора
по УПР

_______ / Вагизова Н.А.

«31» 08 2017г.

Разработчик:
преподаватель ГАПОУ СКСПО Сафронова Е.С.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств……………………………………..4

2. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке…………………….5

3.Оценка освоения учебной дисциплины ....

3.1. Формы и методы оценивания ....

3.2. Типовые задания для оценки освоения учебной дисциплины ....

4. Контрольно-оценочные материалы для итоговой аттестации по учебной дисциплине ....

1. Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств

В результате освоения учебной дисциплины *Математика* обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС по специальности ППССЗ 22.02.06 Сварочное производство следующими умениями, знаниями, которые формируют профессиональную компетенцию, и общими компетенциями:

У1. Решать простые дифференциальные уравнения.
У2. Применять основные численные методы для решения прикладных задач.

Зн.1. Основные понятия и методы математического анализа.
Зн.2. Основы теории вероятностей и математической статистики.
Зн.3. Основы теории дифференциальных уравнений.

Формируемые общие компетенции:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

Формой аттестации по учебной дисциплине является ***дифференцированный зачет***.

2. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

2.1. В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний, а также динамика формирования общих компетенций:

Таблица 1.1

Результаты обучения: умения, знания и общие компетенции	Показатели оценки результата	Форма контроля и оценивания
Уметь:		
У1. Решать простые дифференциальные уравнения. ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество. ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.	- Вычислять предел функции в точке и в бесконечности; - Исследовать функции на непрерывность в точке; - Находить производную функции; - Находить производные высших порядков; - Исследовать функции и строить графики; - Находить неопределенные интегралы; - Вычислять определенные интегралы; - Находить частные производные.	Проверка самостоятельной внеаудиторной работы Тестирование
У2. Применять основные численные методы для решения прикладных задач. ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность. ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.	- Находить вероятности случайного события; - Составлять законы распределения случайной величины; - Вычислять числовые характеристики случайных величин.	
Знать:		
Зн.1. Основные понятия и методы математического анализа.	- Нахождение производные элементарных функций; - Вычисление площадей фигур и объемов тел вращения с использованием определенного интеграла.	
Зн.2. Основы теории вероятностей и математической статистики.	- Понятия: события, частота и вероятность появления события, совместные и несовместные события, полная вероятность; - Теорема сложения вероятностей; - Теорема умножения	

	вероятностей.	
Зн.3. Основы теории дифференциальных уравнений.	- Виды дифференциальных уравнений.	

3. Оценка освоения учебной дисциплины:

3.1. Формы и методы оценивания

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные ФГОС по дисциплине *математика*, направленные на формирование общих и профессиональных компетенций.

При изучении учебной дисциплины предусмотрены следующие виды текущего контроля знаний обучающихся:

Устный опрос – контроль, проводимый после изучения материала в виде ответов на вопросы, позволяет не только проконтролировать знание темы урока, но и развивать навыки свободного общения, правильной устной речи;

Письменный контроль – выполнением практических заданий по отдельным темам, позволяет выявить уровень усвоения теоретического материала и умение применять полученные знания на практике;

Итоговый контроль по дисциплине проводится в форме экзамена, для подготовки к которому обучающие заранее знакомятся с перечнем вопросов по дисциплине.

№	Тип (вид) задания	Проверяемые знания и умения	Критерии оценки
1	Тесты	Знание основ математического анализа	«5» - 100 – 90% правильных ответов «4» - 89 - 80% правильных ответов «3» - 79 – 70% правильных ответов «2» - 69% и менее правильных ответов
2	Математический диктант	Знание таблиц производных, правил дифференцирования, таблицы интегралов	5» - 100 – 90% правильных ответов «4» - 89 - 80% правильных ответов «3» - 79 – 70% правильных ответов «2» - 69% и менее правильных ответов
3	Устный опрос	Знание правил нахождения пределов функции, определения	За правильный ответ ставится положительная оценка

		производной; алгоритмов вычисления площадей криволинейных трапеций и решения дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными	
4	Практическая работа	Умения самостоятельно выполнять практические задания	Выполнение работы (не менее 80%) – положительная оценка
5	Самостоятельная работа студентов	Знания и умения, формируемые при изучении темы. Знание правил оформления рефератов, расчетных и расчетно-графических работ.	Положительная оценка ставится при соблюдении правильности расчетов и построении графиков.

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

Таблица 2.2

Элемент учебной дисциплины	Формы и методы контроля			
	Текущий контроль		Промежуточная аттестация	
	Форма контроля	**Проверяемые ОК, У, З**	**Форма контроля**	**Проверяемые ОК, У, З**
Раздел 1			*Дифференцированный зачет*	*У1, У2* *З 1, З2, З3* *ОК 2-5*
Тема 1.1	*Устный опрос* *Практическая работа №1* *Самостоятельная работа*	*У1* *З2, З3* *ОК 2-5*		
Тема 1.2	*Устный опрос* *Практическая работа №2* *Самостоятельная работа*	*У1* *З2, З3* *ОК 2-5*		
Тема 1.3	*Устный опрос* *Практическая работа №2* *Самостоятельная работа*	*У1* *З3* *ОК 2-5*		
Раздел 2			*Дифференцированный зачет*	*У1, У2* *З 1, З2, З3* *ОК 2-5*
Тема 2.1	*Устный опрос* *Практическая работа №3* *Самостоятельная работа*	*У2* *З 1, З2, З3* *ОК 2-5*		
Раздел 3			*Дифференцированный зачет*	*У1, У2* *З 1, З2, З3* *ОК 2-5*
Тема 3.1	*Устный опрос* *Практическая работа №5* *Самостоятельная работа*	*У2* *З2* *ОК 2-5*		
Тема 3.2	*Устный опрос* *Практическая работа №5* *Самостоятельная работа*	*У2* *З2* *ОК 2-5*		
Тема 3.3	*Устный опрос* *Практическая работа №5* *Самостоятельная работа*	*У2* *З2* *ОК 2-5*		

3.2. Типовые задания для оценки освоения учебной дисциплины

3.2.1. Типовые задания для оценки знаний

Практическая работа № 1 «Производная функции»

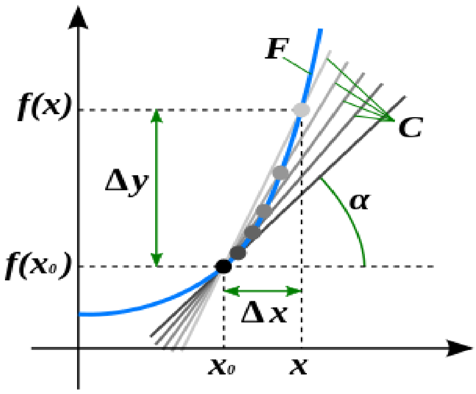
Цель: совершенствовать умения вычислять производные элементарных функций.

Теоретические сведения к практической работе

Произво́дная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется дифференци́рованием. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрирование.

Иллюстрация понятия производной



Определение производной функции через предел

Пусть в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определена функция $f : U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Производной функции f в точке x_0 называется предел, если он существует,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Общепринятые обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = \mathrm{D}f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0} = \dot{y}(x_0).$$

Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в теоретической механике).

Таблица производных

Производные степенных функций	**Производные тригонометрических функций**	**Производные обратных тригонометрических функций**
$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования:

Операция нахождения производной называется дифференцированием. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если *C* — постоянное число и *f=f(x), g=g(x)* — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(Cf)' = Cf'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ …$(g \neq 0)$
- $\left(\dfrac{C}{g}\right)' = -\dfrac{Cg'}{g^2}$ $(g \neq 0)$

Пример №1. Найти производную функции $F(x) = 2x^3 - 3x^4 + 19$.

Решение.

$F'(x) = (2x^3 - 3x^4 + 19)' = (2x^3)' - (3x^4)' + (19)' = 2(x^3)' - 3(x^4)' + 0 = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 4x^3 = 6x^2 - 12x^3$

Пример №2. Найти производную функции $F(x) = x^5 - x^4 + 9$ и вычислить ее значения в точках $x = 0$ и $x = -1$

Решение.

$F'(x) = (x^5 - x^4 + 9)' = (x^5)' - (x^4)' + (9)' = 5x^4 - 4x^3$; $F'(0) = 5 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$; $F'(-1) = 5 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 = 9$.

Пример №3. Найти производную функции $y = (x^2 - 1)(3x^2 + 5)$.

Решение.

$y' = \left((x^2 - 1)(3x^2 + 5)\right)' = (x^2 - 1)'(3x^2 + 5) + (x^2 - 1)(3x^2 + 5)' = 2x(3x^2 + 5) + 6x(x^2 - 1) = 2x(3x^2 + 5 + 3x^2 - 3) = 4x(3x^2 + 1)$.

Пример №4. Найти производную функции $y = \left(\frac{x^2 - 6}{3x + 1}\right)$.

Решение.

$y' = \left(\frac{x^2 - 6}{3x+1}\right)' = \frac{(x^2-6)'(3x+1) - (x^2-6)(3x+1)'}{(3x+1)^2} = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-6)}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2 + 18}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 18}{(3x+1)^2}$.

Содержание практической работы

1. Найдите производные следующих функций:

$y = 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3$;

$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9$;

$y = (2x^3 - 3)(2x^3 - 1)$

2. Найдите производные следующих функций:

$y = \frac{x+5}{x-1}$;

$y = \frac{3x-7}{2x+9}$;

$y = \frac{(x-3)^2}{2x+1}$;

$y = \frac{x^3+3x^2}{3x-1}$;

$$y = \frac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}$$

3. Вычислите значение производной:

$y = x^4 - 3x^2 - 2x + 1$;

$y'(0) = ?$; $y'(1) = ?$

4. Вычислите значение производной:

$y = x^5 + x^4 + 5^3$;

$y'(-1) = ?$

5. Найдите производную следующих функций:

$y = 5(3t^5 - 5t^3 + 9)^{10}$

$y = 2\sqrt{1 + 2x - x^2}$

6. Найдите производные следующих функций:

$y = e^{-x}$;

$y = e^{-x}(x^2 + 6x + 6)$

7. Найдите производные следующих функций:

$y = \ln 3x$;

$y = \log_3(4x - 2)$

8. Найдите производные следующих функций:

$y = 7\cos x - 5\sin x - 9$;

$y = 5\cos 2x$;

$y = \sin x \cos x$.

Практическая работа № 2 «Производная сложной функции»

Цель: совершенствовать умения вычислять производные сложных функций.

Теоретические сведения к практической работе

Сложная функция – это функция, аргументом которой также является функция.

С нашей точки зрения, это определение наиболее понятно. Условно можно обозначать как *f(g(x))*. То есть, *g(x)* как бы аргумент функции *f(g(x))*.

К примеру, пусть *f* – функция арктангенса, а *g(x) = lnx* есть функция натурального логарифма, тогда сложная функция *f(g(x))* представляет собой *arctg(lnx)*. Еще пример: *f* – функция возведения в четвертую степень, а $g(x)=x^2+2x-3$ - целая рациональная функция, тогда $f(g(x))=(x^2+2x-3)^4$.

В свою очередь, *g(x)* также может быть сложной функцией. Например, $y=\sin\left(\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3-5}}\right)$. Условно такое выражение можно обозначить как $y=f(f_1(f_2(x)))$. Здесь *f* – функция синуса, f_1 - функция извлечения квадратного корня, $f_2(x)=\dfrac{2x+1}{x^3-5}$ - дробная рациональная функция. Логично предположить, что степень вложенности функций может быть любым конечным натуральным числом $y=f(f_1(f_2(f_3(\ldots(f_n(x))))))$.

Часто можно слышать, что сложную функцию называют композицией функций.

Формула нахождения производной сложной функции. $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Содержание практической работы

Вариант 1

Найти производную сложной функции:

1) $y=(2x^5+7x^2)^{10}$
2) $y=\sqrt{8x^3-\sin x}$
3) $y=\cos(16x^2-2x^6)$
4) $y=\ln(15x^4+e^x)$
5) $y=tg(25x^3-6x^2+3x)$
6) $y=e^{\cos x-16x}$
7) $y=\arcsin(6x^3+4x^2)$
8) $y=5^{tgx+2}$

Вариант 2

Найти производную сложной функции:

1) $y=(8x^9+12x^3)^7$
2) $y=\sqrt{10x^2-\ln x}$
3) $y=\sin(x^4-3x^9)$
4) $y=\log_3(5x^7+x^5)$
5) $y=ctg(2x^4-7x^8+2x^3)$
6) $y=4^{\cos x-3x}$
7) $y=\arcsin(11x^3+5x^7)$
8) $y=2^{ctgx}$

Практическая работа № 2 «Производные высших порядков»

Цель: совершенствовать умения вычислять производные высших порядков.

Теоретические сведения к практической работе

Определение. Пусть функция y = f(x) определена и дифференцируема на интервале (a, b). Если функция f ¢ (x) дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то ее производную называют второй производной или производной второго порядка функции f(x) в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$, то есть $f''(x_0) = (f'(x_0))'$.

Определение. Пусть функция y = f(x) имеет на интервале (a, b) производные f ¢ (x), $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)$. Если в точке $x_0 \in (a, b)$ существует производная функции $f^{(n-1)}(x_0)$, то эту производную называют производной n-ого порядка, то есть

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x_0))', n = 1, 2, ...,$$

где производная нулевого порядка − это функция f(x).

Физический смысл второй производной. Ускорение *a* прямолинейного движения точки в данный момент времени равно второй производной пути по времени.

$$a = v' = S''$$

Задания для практического занятия:

Задание № 1. Найти производные высших порядков функций.

1. $y = x^{10} + 3x^5 + \sqrt{2}x^3 + \sqrt[5]{7},\ y'' - ?$
2. $y = \sin^3 x,\ y'' - ?$
3. $y = (4x^2 + 3x + 1)^3,\ y'' - ?$
4. $y = (x+3)^4,\ y''' - ?$
5. $y = e^x + x^5 + 1,\ y^{(20)} - ?$
6. $y = 2\sin x - 3\cos x,\ y^{(n)} - ?$

Задание № 2. Сколько раз нужно дифференцировать функцию $y = (x^2+1)^{50}$, чтобы в результате получился многочлен 30-й степени.

Задание № 3. Докажите, что для функции y = $y = e^x + x^2$ справедливо равенство $y^{IV} = y^V$.

Задание № 4.

1. В момент времени t = 1 найдите скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s = 2t^3 - 3t$.
2. Точка движется по закону $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 1$. В какие моменты времени ее ускорение будет равно нулю?

Практическая работа № 3 «Условия монотонности функции. Необходимое и достаточное условие существования экстремума»

Цель: совершенствовать умения исследовать функцию.

Теоретические сведения к практической работе

Необходимые условия возрастания (убывания) функции.

Теорема. *Если дифференцируемая на некотором интервале* $(a;b)$ *функция* $y=f(x)$ *возрастает (убывает) на нем, то* $f'(x)\geq 0$ *(* $f'(x)\leq 0$ *) для всех* $x\in(a;b)$.

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$. Выберем произвольные точки x и $x+\Delta x$ на этом интервале и рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Функция $y=f(x)$ возрастает, поэтому при $\Delta x>0$ будет $x+\Delta x>x$ и $f(x+\Delta x)>f(x)$, а при $\Delta x<0$ будет $x+\Delta x<x$ и $f(x+\Delta x)<f(x)$. В обоих случаях $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0,$ так как числитель и знаменатель дроби будут иметь одинаковые знаки. Следовательно, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$

Аналогично рассматривается случай, когда функция $y=f(x)$ убывает наинтервале $(a;b)$.

Замечание 1. *Геометрически теорема означает, что касательные к графику возрастающей функции имеют острые углы с положительным направлением оси* Ox, *а убывающие – тупые*.

Достаточные условия возрастания (убывания) функции.

Теорема. *Если функция* $y=f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a;b)$ *и* $f'(x)>0$ *(* $f'(x)<0$ *) для всех* $x\in(a;b)$, *то функция* $y=f(x)$ *возрастает (убывает) на этом интервале.*

Доказательство. Пусть $f'(x)>0$ на интервале $(a;b)$. Возьмем точки $x_2>x_1$. Применим к отрезку $[x_1;x_2]$ теорему Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$, где $c\in[x_1;x_2]$. Так как $f'(c)>0$ и $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$ и $f(x_2)>f(x_1)$. Следовательно, функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$.

Максимум и минимум функции.

Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума) функции* $y=f(x)$, если существует такая ε – окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) (рис. 64).

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ее *максимумом (минимумом)*.

Максимум и минимум функции называются ее *экстремумами*.

Точки, в которых производная функции не существует или равна нулю, называют *критическими*.

Необходимое условие экстремума.

Теорема. *Если дифференцируемая функция* $y=f(x)$ *имеет экстремум в точке* x_0, *то ее производная в этой точке равна нулю,* $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть x_0 – точка максимума. Следовательно, в окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0)>f(x_0+\Delta x)$.

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<0,$ если $\Delta x>0$ и
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0,$

Если $\Delta x<0$. По условию теоремы производная функции $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ существует. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим $f'(x_0)\ge 0$, если $\Delta x<0$ и $f'(x_0)\le 0$, если $\Delta x>0$. Это возможно лишь в случае $f'(x_0)=0$.

Аналогично можно показать утверждение теоремы если x_0 – точка минимума.

Замечание 1. *Геометрически утверждение теоремы означает, что в точках экстремума касательные к графику функции параллельны оси* Ox. Обратная теорема не верна. Если $f'(x_0)=0$, то это не всегда означает, что точка x_0 – точка экстремума. Действительно, для функции $y=x^3$ в точке $x_0=0$ производная $y'=3x^2$, $y'(0)=0$, но точка O не является ни минимумом, ни максимумом. Существуют так же функции, которые в точках экстремума не имеют производных. Так функция $y=|x|$ в точке $x_0=0$ не имеет производной, но эта точка является ее минимумом.

Достаточное условие экстремума.

Теорема. *Если непрерывная функция* $y=f(x)$ *дифференцируема в некоторой* δ *– окрестности критической точки* x_0 *и при переходе через нее (слева направо) производная* $f'(x)$ *меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то точка* x_0 *есть точка максимума (минимума).*

Доказательство. Рассмотрим δ – окрестность точки x_0. Пусть выполняется условия: $f'(x)>0$, для любого $x\in(x_0-\delta;x_0)$ и $f'(x)<0$, для любого $x\in(x_0;x_0+\delta)$. Тогда функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $(x_0-\delta;x_0)$ и убывает на интервале $(x_0;x_0+\delta)$. Следовательно, значение функции $y=f(x)$ в точке x_0 является наибольшим значением на интервале $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, т. е. $f(x)<f(x_0)$ для всех $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$. Это означает, что x_0 – точка максимума. Аналогично доказывается случай для точки минимума.

Теорема. *Если в точке* x_0 *первая производная функции равна нулю* $f'(x_0)=0$, *а вторая производная в точке* x_0 *существует и отлична от нуля* $f''(x_0)\ne 0$, *то при* $f''(x_0)<0$ *в точке* x_0 *функция* $y=f(x)$ *имеет максимум, а при* $f''(x_0)>0$ *– минимум.*

Доказательство. Пусть $f''(x_0)>0$. Так как

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0,$$

то в достаточно малой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0.$$

Если $\Delta x<0$, то $f'(x_0+\Delta x)<0$, а если $\Delta x>0$, то $f'(x_0+\Delta x)>0$.

Таким образом, при переходе через точку x_0 первая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, по теореме 35 достаточных условий экстремума, точка x_0 есть точка минимума. Аналогично доказывается случай для точки максимума.

Пример 1. Исследовать монотонность функции

$y=\dfrac{x-1}{x^2+8}$ и найти ее точки экстремума.

Решение. Найдем производную функции и приравняем ее к нулю

$$y'=\frac{(x-1)'\cdot(x^2+8)-(x-1)\cdot(x^2+8)'}{(x^2+8)^2}=\frac{x^2+8-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=¿$$

$$¿\frac{x^2+8-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+8}{(x^2+1)^2}=0.$$

Отсюда: $-x^2+2x+8=0,\ x_1=-4,\ x_2=2$. Построим числовую ось и на ней отметим методом интервалов знаки производной. Там, где производная меняет знак с (+) на (-), будет точка максимума (max), где с (-) на (+) – точка минимума (min). Из рисунка видно, что минимум достигается в точке $x=-4$, максимум - в точке $x=2$, причем

$$y_{min}=\frac{-4-1}{16+8}=\frac{-5}{24},\ y_{max}=\frac{2-1}{4+8}=\frac{1}{12}.$$

Функция убывает на интервалах $(-\infty;-4)$ и $(2;+\infty)$, возрастает на интервале $(-4;2)$.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Такая функция достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения она может принимать либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a;b]$, либо на границе отрезка, т. е. в точках a и b.

Если x_0□ $[a;b]$, то наибольшее и наименьшее значения следует искать среди критических точек функции $y=f(x)$.

Таким образом, можно сформулировать следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1) найти критические точки функции на интервале $(a;b)$;
2) вычислить значения функции в найденных точках;
3) вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. в точках $x=a$ и $x=b$;
4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание 1. Если функция $y=f(x)$ имеет лишь одну критическую точку и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает свое наибольшее (наименьшее) значение.

Замечание 2. Если функция $y=f(x)$ не имеет на отрезке $[a;b]$ критических точек, то на нем функция либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает. Свои наибольшее и наименьшее значения функция принимает в этом случае на концах отрезка.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$y=3x^5-100x^3+960x-150$

на отрезке $[-3:3]$.

Решение. Найдем производную функции и приравняем ее к нулю

$y'=15x^4-300x^2+960=0,\ x^4-20x^2+64=0.$

Откуда $x_1=-4,\ x_2=-2,\ x_3=2,\ x_4=4$. Точки x_1 и x_4 не лежат на отрезке $[-3:3]$, поэтому находим значения функции в точках x_2, x_3 и на границе отрезка - в точках $x=-3$ и $x=3$:

$y(-3)=3(-3)^5-100(-3)^3+960(-3)-150=-3659;$
$y(-2)=3(-2)^5-100(-2)^3+960(-2)-150=-2966;$
$y(2)=3\cdot 2^5-100\cdot 2^3+960\cdot 2-150=1066;$
$y(3)=3\cdot 3^5-100\cdot 3^3+960\cdot 3-150=759.$

Выбираем наименьшее и наибольшее из этих значений.

Ответ: $y_{наим.}=-3659,\ при\ x=-3,\ y_{наиб.}=1066,\ при\ x=2$.

Практическая работа № 4 «Нахождение неопределенных интегралов. Вычисление определенных интегралов»

Цель: совершенствовать умения находить неопределенные интегралы и вычислять определенные интегралы.

Теоретические сведения к практической работе

Основные свойства неопределенного интеграла

$1^0\ (\int f(x)dx)' = f(x)$; $\qquad 2^0\ d\int f(x)dx = f(x)dx$;

$3^0 \int dx(x) = F(x) + c$; $\qquad 4^0 \int kf(x)dx = k\int (x)dx$;

$5^0 \int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

12.2. Таблица основных интегралов.

$$1.\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, (\alpha \neq -1), \text{в частности, } \int du = u + c;$$

$$2.\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;\ 3.\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c;\ 4.\int e^u du = e^u + c;\ 5.\int \sin u du = -\cos u + c;$$

$$6.\int \cos u du = \sin u + c;\ 7.\int tgu du = -\ln|\cos u| + c;\ 8.\int ctgu du = \ln|\sin u| + c;$$

$$9.\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c;\ 10.\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c;\ 11.\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + c;$$

$$12.\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c;\qquad 13.\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c;$$

$$14.\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c;\qquad 15.\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + c;$$

$$16.\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c;\qquad 17\int \sqrt{a^2 - u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c;$$

$$18.\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{u}{2} \times \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c.$$

Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к одному или нескольким табличным интегралом, называется непосредственном интегрированием.

Примеры:

1) $\int \frac{d(x)}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + c$

2) $\int \left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right) d(x) = 4\int x^3 dx - \frac{5}{2}\int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \int 3^{1-x} d(1-x) =$
$x^4 - \frac{5}{2} tgx - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + c$

Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)$ и получают

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

Примеры:

1) $\int \cos 3x dx = \left| \begin{matrix} 3x = t & 3dx = dt \\ (3x)'dx = dt & ; dx = \frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \int \cos t \times \frac{1}{3}\sin t + c = \frac{1}{3}\sin 3x + c$

2) $\int \sin(7x+8)dx = \left| \begin{matrix} 7x+8 = t & dx = \frac{1}{7}dt \\ 7dx = dt & ; \end{matrix} \right| = \int \sin t \times \frac{1}{7}dt \Big| = -\frac{1}{7}\cos t + c = -\frac{1}{7}\cos(7x+8) + c$

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} 1-x^2 = t & dx = -\frac{dt}{2x}dt \\ -2xdx = dt & ; \end{matrix} \right| = -\int \frac{\cancel{x}dt}{\sqrt{t} \times 2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2} \times \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c =$
$= -\frac{1}{2} \times 2 \times t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

4) $\int (15-3x)^7 dx = \left| \begin{matrix} 15-3x = t & dx = -\frac{1}{3}dt \\ -3dx = dt & ; \end{matrix} \right| = \int t^7 \times (-\frac{1}{3})dt = -\frac{1}{3} \times \frac{t^8}{8} + c = -\frac{(15-3x)^8}{24} + c$

13.3. Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int u d\upsilon = u \times \upsilon - \int \upsilon du}$$

Вид интеграла	Подстановка
$\int P(x) arctgx dx; \int P(x) arcctgx dx; \int P(x) \ln x dx;$ $\int P(x) \arcsin x dx; \int P(x) \arccos x dx; P(x)$ - многочлен.	$u = arctgx$ $u = arcctgx$ $u = \ln x$ $u = \arcsin x$ $u = \arccos x$ $d\upsilon = P(x)dx$ $\upsilon = [первообразная P(x)]$
$\int P(x)e^{kx}; \int P(x)\sin kx dx; \int P(x)\cos kx dx,$ $k - некоторое\ число$ $P(x) - многочлен.$	$u = P(x)$ $d\upsilon = e^{kx}dx$ $\upsilon = [первообразная E^{kx}]$ $d\upsilon = \sin kx dx$ $\upsilon = [первообразная \cos kx]$
$\int e^{ax}\cos bx dx; \int e^{ax}\sin bx dx$ *a и b* *некоторые числа.*	*Двукратное интегрирование* *Например:* $\int e^x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = e^x & dx = \cos x dx \\ du = e^x dx & ; \upsilon = \sin x \end{vmatrix} =$ $= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = e^x & d\upsilon = \sin x dx \\ du = e^x dx & ; \upsilon = -\cos x \end{vmatrix} =$ $= e^x \sin x - (-e^x \cos + \int e^x \cos x dx)$. $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$.

Примеры:

1) $\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{vmatrix} = x \times \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$

2) $\int (2x+1)e^{3x} d(x) = \begin{vmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$

$= (2x+1) \times \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} 2x dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + c$

Содержание практической работы

№ 1Вычислить определенный интегралы:

Вариант 1

1. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$
2. $\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$
4. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Вариант 2

1. $\int_1^2 e^x dx$
2. $\int_0^2 \left(3x^2-1\right)dx$
3. $\int_0^{\pi} \sin x dx$
4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

№2. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

Вариант 1

1. $\int (\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$
2. $\int e^x(2-\frac{e^{-x}}{x^3})dx$
3. $\int (2^x+3^x)dx$
4. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

Вариант 2

1. $\int (x^4+\sqrt[5]{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})dx$
2. $\int (\sin x+5\cos x)dx$
3. $\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$
4. $\int ctg^2 x dx$

№3. Пользуясь методом подстановки вычислить интегралы:

Вариант 1

1. $\int \cos 5x dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$
3. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$
4. $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}dx$

Вариант 2

1. $\int \sin 7x dx$
2. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$
4. $\int e^{\sin x}\cos x dx$

№4. С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы:

Вариант 1

1. $\int \left(4x^3+6x-7\right)\ln x dx$
2. $\int x\ln x dx$
3. $\int xe^{-x}dx$
4. $\int \arcsin x dx$

Вариант 2

1. $\int \left(x^2+3x+2\right)\ln x dx$
2. $\int x\ln\left(3x+2\right)dx$
3. $\int xe^{5x}dx$
4. $\int \cos\left(\ln x\right)dx$

Практическая работа № 5 «Частные производные»

Цель: совершенствовать умения вычислять частные производные.

Теоретические сведения к практической работе

Множество точек M, которые удовлетворяют неравенству $\rho(M;M_0)<\delta$, называют δ-окрестностью точки M_0.

Пусть функция двух переменных $z=f(x;y)$ (для большего количества переменных всё аналогично) определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Дадим переменной x приращение Δx так, чтобы точка $(x+\Delta x;y)$ принадлежала этой окрестности. При этом функция $z=f(x;y)$ изменится на величину

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x;y) - f(x;y),$$

которая называется *частичным приращением функции $z=f(x;y)$ по переменной x.*

Аналогично величину

$$\Delta_y z = f(x;y+\Delta y) - f(x;y)$$

называют *частичным приращением функции по переменной y.*

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x},$$

то его называют *частной производной функции $z=f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ по переменной x* и обозначают такими символами:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x,\ f'_x.$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}$$

Из таких определений следует, что правила вычисления производных, совпадают с правилами дифференцирования функций одной переменной. Следует только помнить, что при вычислении частной производной по одной переменной остальные переменные считаются постоянными.

Частные производные характеризуют скорость изменения функции в направлении соответствующих координатных осей. Частные производные от частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=f(x;y)$ называются *частными производными второго порядка.* Функция двух переменных может иметь четыре частные производные второго порядка, которые обозначают так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = z''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = z''_{xy}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}.$$

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются *смешанными.* Можно доказать, что если они непрерывны, то равны между собой.

Частные производные от частных производных второго порядка называются *частными производными третьего порядка* и т. д.

Само вычисление частной производной по существу не представляет ничего нового по сравнению с вычислением обыкновенной производной.

Пример 1: Найти частные производные функции

$z = x^2 y^3 + 4x^3 y^2 + 5x - 4y + 1$

Решение:

$z'_x = 2xy^3 + 12x^2 y^2 + 5$

$z'_y = 3x^2 y^2 + 8x^3 y - 4$

(при дифференцировании по x мы считаем y=const, а при дифференцировании по y мы считаем x=const).

Пример 2: Найти частные производные функции

$z = (x^2 + y^2)e^{xy}$

Решение:
$$z'_x = \left(x^2 + y^2\right)'_x e^{xy} + \left(x^2 + y^2\right)\left(e^{xy}\right)'_x = 2xe^{xy} + \left(x^2 + y^2\right)e^{xy} y = \left(2x + x^2 y + y^3\right)e^{xy}$$
$$z'_y = \left(x^2 + y^2\right)'_y e^{xy} + \left(x^2 + y^2\right)\left(e^{xy}\right)'_y = 2ye^{xy} + \left(x^2 + y^2\right)e^{xy} x = \left(2y + x^3 + xy^2\right)e^{xy}$$

Пример 3: Пусть $u = x^y$ ($x>0$); частные производные этой функции будут:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \cdot \ln x.$$

Первая из них вычисляется как производная степенной функции от x (при y =const), а вторая - как производная показательной функции от y (при x = const).

Пример 4: Если $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Пример 5: Для $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Пример 6: Пусть $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$, где $f(u)$- *произвольная* функция (имеющая производную).

Показать, что для z всегда выполняется соотношение:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

какова бы ни была функция f .

По правилу дифференцирования сложной функции (означая штрихом производную по *u*) имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot f'(x^2 - y^2) \cdot 2x = 2xy \cdot f'(x^2 - y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f(x^2 - y^2) - 2y^2 \cdot f'(x^2 - y^2),$$

и отсюда

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cdot f'(x^2 - y^2) + \frac{1}{y} \cdot f(x^2 - y^2) - 2y \cdot f'(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2}.$$

Пример 7: Сторона *a* треугольника определяется по двум другим сторонам *b, c* и заключенному между ними углу α так: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$.

Тогда

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{b - c \cdot \cos\alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}} = \frac{b - c \cdot \cos\alpha}{a}; \qquad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{a}$$

Практическая работа № 6 «Решение однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка»

Цель: закрепление теоретического материала по изучению решения дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Теоретические сведения к практической работе

Общий вид линейного уравнения:

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

Сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию заменить произведением *u* v,* т. е.

$$y = uv; \qquad y' = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

Примеры решения уравнения:

Рассмотрим пример решения линейного дифференциального уравнения:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 2x\dfrac{1}{\cos x}$ и частное решение, удовлетворяющие начальному условию $y(0) = 2$.

Решение:

Данное уравнение является линейным, так как содержит искомую функцию и ее производную в первой степени и не содержит их произведений. Применяем подстановку $y = uv$, где *u* и *v* – некоторые неизвестные функции аргумента *x*. Если $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + uv'$. Подставляя *y* и y' в исходное уравнение, получим $u'v + uv' - uv\,\mathrm{tg}\,x = 2x\dfrac{1}{\cos x}$. Группируем первое и третье слагаемые и выносим *v* за скобку $v(u' - u\,\mathrm{tg}\,x) + uv' = 2x\dfrac{1}{\cos x}\ (1)$.

Так как искомая функция *y* представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию *u* так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках левой части равенства (1), обращалось в нуль, т.е., чтобы имело место равенство $u' - u\,\mathrm{tg}\,x = 0$ (2). Тогда уравнение (1) принимает вид

$$uv' = 2x\frac{1}{\cos x} \quad (3).$$

Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными относительно *u* и *x*. Решим его

$$\frac{du}{dx} = u\,\mathrm{tg}\,x;\quad \frac{du}{u} = \mathrm{tg}\,xdx;\quad \int\frac{du}{u} = \int \mathrm{tg}\,xdx;\quad \ln u = -\ln\cos x;\quad u = \frac{1}{\cos x}.$$

Чтобы равенство (2) имело место, достаточно найти одно какое-либо частное решение, удовлетворяющее этому уравнению. Поэтому для простоты при интегрировании этого уравнения находим то частное решение, которое соответствует значению произвольной постоянной $C = 0$. Подставив в (3) найденное выражение для *u*, получим

$\frac{1}{\cos x}v' = 2x\frac{1}{\cos x}$; $v' = 2x$; $dv = 2xdx$. Интегрируя, имеем $v = x^2 + C$

Теперь можно получить общее решение исходного уравнения

$$y = uv = \frac{1}{\cos x}\left(x^2 + C\right)$$

Определим значение произвольной постоянной *C* при указанных начальных условиях

$$2 = \frac{1}{\cos 0}(0 + C);\quad C = 2$$

Таким образом, $y = \frac{1}{\cos x}\left(x^2 + 2\right)$ есть частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию.

Содержание практической работы

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 3x$
2. $x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 1 = 0$
3. $\frac{dy}{dx} - 7y = 8e^{2x}$
4. $\frac{dy}{dx}\cos x - y\sin x = cos^2 x$

Практическая работа № 7 «Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка»

Цель: приобрести навыки решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Теоретические сведения к практической работе

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Пример.

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется частным решением дифференциального уравнения.

Определение. Задачей Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \frac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

Определение. Интегральной кривой называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, разрешенным относительно производной.

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ [illegible]}$$

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$y^{-2/3}dy = dx$

$\int y^{-2/3}dy = \int dx$

$3y^{1/3} = x + C$

$27y = (x+C)^3$ - общий интеграл

$y = \frac{1}{27}(x+C)^3$ - общее решение

Пример. Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^{y} = 0$ при условии y(1) = 0.

$\frac{y\,dy}{dx} + xe^{y} = 0$

$y\,dy + xe^{y}dx = 0; \quad \frac{y}{e^{y}}dy = -x\,dx$

$\int \frac{y}{e^{y}}dy = -\int x\,dx$

[illegible]

$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$

$2e^{-y}(y+1) = x^2 + C$

Если y(1) = 0, то [illegible]

Итак, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

Уравнение вида:

y'+p(x)y=q(x) (*), где p(x) и q(x) — непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Название уравнения объясняется тем, что неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение линейно, т. е. в первой степени.

Если q(x) = 0, то уравнение (*) называется линейным однородным уравнением. Если q(x)≠0, то уравнение (*) называется линейным неоднородным уравнением. Для нахождения общего решения уравнения (10) может быть применен метод вариации постоянной. В этом методе сначала находят общее решение линейного однородного уравнения:

y'+p(x)y=0 (**) соответствующего данному неоднородному уравнению (*). Уравнение (**) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|$

Отсюда, потенцируя, находим общее решение данного уравнения:

$y = \pm C_1 e^{-\int p(x)dx}$, или $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ (***)

где $C = \pm C_1$ — произвольная постоянная.

Теперь найдем общее решение уравнения (*) в виде (***), где C будем считать не постоянной, а новой неизвестной функцией от x (в этом смысл метода!), т. е. в виде $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$

Чтобы найти функцию C(x) подставим решение в виде в уравнение (*). Получим:

$C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$

или

$C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$

Итак, чтобы функция являлась решением уравнения (*), функция C(x) должна удовлетворять уравнению $C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$.

Интегрируя его, находим:

$C(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1$

где C_1 — произвольная постоянная. Подставляя найденное выражение для C (x) в соотношение (10), получаем общее решение линейного уравнения (10):

$y(x)=C_1e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

<u>Пример</u>. Найти общее решение уравнения $y'+3y=e^{2x}$.

Данное уравнение является линейным. Здесь $p(x)=3$, $q(x)=e^{2x}$. Решаем сначала соответствующее однородное уравнение $y'+3y=0$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y}=-3dx$ и интегрируя, находим $\ln|y|=-3x+\ln|C_1|$ или $y=\pm C_1e^{-3x}=Ce^{-3x}$. Ищем общее решение данного уравнения в виде $y=C(x)e^{-3x}$. Дифференцируя, имеем $y'=C'(x)e^{-3x}-3C(x)e^{-3x}$. Подставляя в данное уравнение выражения для y и y', получаем $C'(x)e^{-3x}=e^{2x}$, $C'(x)=e^{5x}$ или $dC=e^{5x}dx$, откуда $C(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+C_2$, где C_2 - произвольная постоянная. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид:

$y=C(x)e^{-3x}=(\frac{1}{5}e^{5x}+C_2)e^{-3x}$ или $y=\frac{1}{5}e^{2x}+C_2e^{-3x}$

Метод И. Бернулли

Суть заключается в следующем. Решение уравнения (10) ищется в виде произведения двух других функций, т.е. с помощью постановки (подстановка Бернулли):

$y=u(x)+v(x)$

где u(x), v(x) - неизвестные функции от x, причем одна из них произвольна. Тогда $y'=u'v+uv'$ Подставляя выражения для y и y' в уравнение (10), получаем:
$u'v+uv'+p(x)uv=q(x)$ или $u'v+u(v'+p(x)v)=q(x)$ (15)

Выберем функцию v(x) так, чтобы сумма в скобках обратилась в нуль, т.е. v'+p(x)v=0. Итак, $\frac{dv}{dx}$+p(x)v=0, т.е. $\frac{dv}{v}$=-p(x)dx. Интегрируя, получаем: ln|v|=-∫p(x)dx+ln|c|. Ввиду свободы выбора функции v(x), можно принять c=1. Отсюда $v=e^{-\int p(x)dx}$. Подставляя найденную функцию v в уравнение (10), получаем $u'e^{-\int p(x)dx}=q(x)$. Получено уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его: $u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}$. Возвращаясь к переменной y, получаем решение исходного дифференциальное уравнения.

$y=u\bullet v=(\int q(x)\bullet e^{\int p(x)dx}dx+c)\bullet e^{-\int p(x)dx}$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'+3y=e^{2x.}$

Делаем замену переменных y=u•v; y'=u'v+uv', где u=u(x) - произвольная функция, v=v(x) - функция, определяемая так, чтобы y=u•v было решением уравнения $u'v+uv'+3u\bullet v=e^{2x}$. Группируем члены полученного уравнения: $u'v+u(v'+3v)=e^{2x}$. Приравниваем множитель второго слагаемого, стоящий в скобках к нулю v'+3v=0; ⇒ $\frac{dv}{dx}$+3v=0.

Решив данное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, имеем

$\frac{dv}{dx}$=-3v ⇒ $1=\left(1-\frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)$, $\Rightarrow\ x=(x-y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)$ =-3dx ⇒ ∫$\frac{dv}{dx}$=3∫dx ⇒ ln|v|=-3x ⇒ $v=e^{-3x}$

Подставляя найденную функцию $v=e^{-3x}$ в уравнение $u'v+u(v'+3v)=e^{2x}$, найдем u

$u'\bullet e^{-3x}=e^{2x}\Rightarrow u'=e^{5x}\Rightarrow \frac{du}{dx}=e^{5x}\Rightarrow \int du=\int e^{5x}dx\Rightarrow u=\frac{1}{5}e^{5x}+c$

Подставляя u и v в y=u•v находим решение заданного уравнения:

$y=(\frac{1}{5}e^{5x}+c)\bullet e^{-3x}$ или $y=\frac{1}{5}e^{2x}+ce^{-3x}$

Содержание практической работы

Вариант 1

1. Найти общее решение уравнения: $y'+\frac{y}{x}=4$
2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $y'+2y=4x;\ y=3$ при $x=0$.

Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения: $y'-\frac{y}{x}=-\frac{1}{x}$
2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $\frac{dy}{dx}-\frac{3y}{x}=e^x x^3;\ y=e\ при\ x=1$.

Вариант 3

1. Найти общее решение уравнения: $x\frac{dy}{dx}-x^2+2y=0$
2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2};\ y=1\ при\ x=2$.

Вариант 4

1. Найти общее решение уравнения: $\frac{dy}{dx}+xy=x$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $\frac{dy}{dx}\cos^2 x=tg\, x-y\, ;\, y=0\, при\, x=0$.

Вариант 5

1. Найти общее решение уравнения: $xy'-3y=-x^2$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $\cos xy' - y\sin x = \cos^2 x; y = 1$ при $x = 0$.

Вариант 6

1. Найти общее решение уравнения: $x^2 y'-2xy=3$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $y' + \frac{y-1}{x} = 1; y = 2$ при $x = 2$.

Практическая работа № 8 «Интерпретация операций над множествами»

Цель: сформировать умение выполнять операции с множествами

Теоретические сведения к практической работе

Множество – одно из основным понятий математики.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают x ∈ X (∈ — принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают A ⊂ B (⊂ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество A ∪ B, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то A ∪ B = {1,2,3,4,5,6}

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество A ∩ B, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то A ∩ B = {2,4}

Разностью множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множесву A, но не принадлежат множеству B.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}

Симметричной разностью множеств A и B называется множество A Δ B, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть A Δ B = (AB) ∪ (BA).

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то A Δ B = {1,2} ∪ {5,6} = {1,2,5,6}

Свойства:

Свойства перестановочности:

A ∪ B = B ∪ A

A ∩ B = B ∩ A

Сочетательное свойство:

(A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)

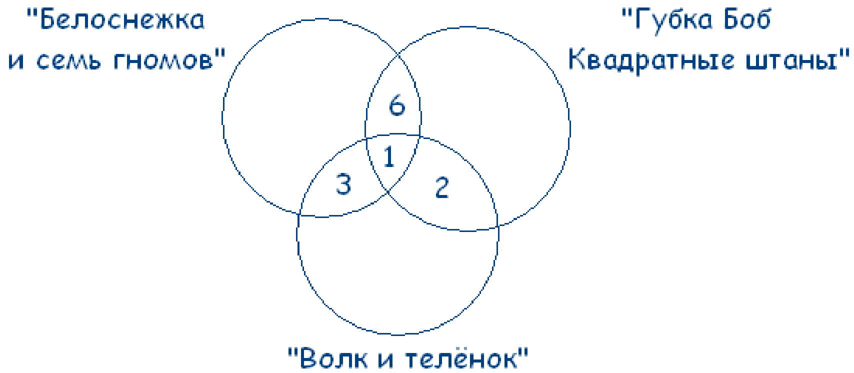
(A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

Круги Эйлера (Эйлера-Вена) — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

Пример: Среди школьников шестого класса проводилось анкетирование по любимым мультфильмам. Самыми популярными оказались три мультфильма: «Белоснежка и семь гномов», «Губка Боб Квадратные Штаны», «Волк и теленок». Всего в классе 38 человек. «Белоснежку и семь гномов» выбрали 21 ученик, среди которых трое назвали еще «Волк и теленок», шестеро – «Губка Боб Квадратные Штаны», а один написал все три мультфильма. Мультфильм «Волк и теленок» назвали 13 ребят, среди которых пятеро выбрали сразу два мультфильма. Сколько человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны»?

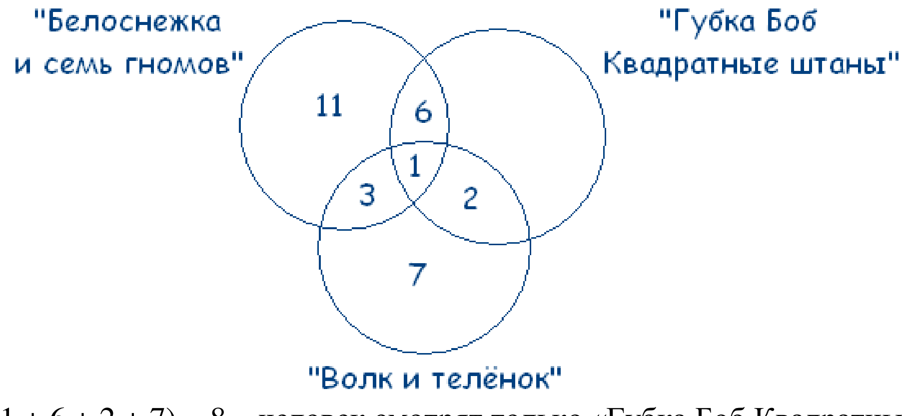
Решение: В этой задаче 3 множества, из условий задачи видно, что все они пересекаются между собой. Получаем такой чертеж:

Учитывая условие, что среди ребят, которые назвали мультфильм «Волк и теленок» пятеро выбрали сразу два мультфильма, получаем:



21 – 3 – 6 – 1 = 11 – ребят выбрали только «Белоснежку и семь гномов».
13 – 3 – 1 – 2 = 7 – ребят смотрят только «Волк и теленок».

Получаем:



38 – (11 + 3 + 1 + 6 + 2 + 7) = 8 – человек смотрят только «Губка Боб Квадратные Штаны».
Делаем вывод, что «Губка Боб Квадратные Штаны» выбрали 8 + 2 + 1 + 6 = 17 человек.

Ответ. 17 человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны».

Содержание практической работы

Задание 1. 1) Найти множества $A \cap B$, AUB, A/B, B/A, если:

а) $A=\{e, o, p, x\}$ $B=\{x, y\}$

б) $A=\{x: -3<x<4\}$ $B=\{x: 0 \leq x \leq 6\}$

в) $A=\{2^n+1\}$, $B=\{n+1\}$ $n \in N$

2) Найти множества $A \cap B$, AUB, A/B, B/A, если:

а) $A=\{12, 13, 14, 15\}$ $B=\{12, 14, 16\}$

б) $A=\{x: 0<x<2\}$ $B=\{x: 1 \leq x \leq 4\}$

в) $A=\{3-(n+1)\}$, $B=\{n+5\}$ $n \in N$

Задание 2. 1) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) только один язык?

б) испанский язык?

в) только немецкий язык?

г) знают английский и немецкий, но не знают французский?

2) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) ровно два языка?

б) только французский язык?

в) знают немецкий и французский, но не знают английский?

г) не знают испанский язык?

Практическая работа № 9, 10, 11 «Формула полной вероятности. Формула Бейеса. Повторные и независимые испытания. Простейший поток событий и распределения Пуассона. Дискретная и непрерывная случайные величины. Способ задания дискретной величины. Числовые характеристики дискретной случайной величины»

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей.

Теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числуn всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$
$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события A.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: $0<P(A)<1$.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События A и B называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$

$m_1 = 4$

$p_1 = \frac{4}{10}$

$n_2 = 10$

$m_2 = 3$

$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) + ...$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(\mathrm{A}) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(\mathrm{H}_i / \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_i) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_i)}{p(\mathrm{A})}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$n = 20 + 30 + 50 = 100$

$p(\mathrm{H}_1) = \frac{20}{100} = 0{,}2$

$p(\mathrm{H}_2) = \frac{30}{100} = 0{,}3$

$p(\mathrm{H}_3) = \frac{50}{100} = 0{,}5$

$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) = 0{,}7$

$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) = 0{,}8$

$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) = 0{,}9$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}14 + 0{,}24 + 0{,}45 = 0{,}83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(\mathrm{H}_1/\mathrm{A})=\frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1)}{p(\mathrm{A})}=\frac{0,2\cdot 0,7}{0,83}\approx 0,169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$$p(\mathrm{H}_1)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_2)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_3)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1)=\frac{5}{12}$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2)=1$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3)=0$$

$$p(\mathrm{A})=\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{5}{36}+\frac{1}{3}=\frac{17}{36}$$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m})=\mathrm{C}_n^m\, p^m(1-p)^{n-m}, m=0,1,2,...,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$$p=0,2$$

$$n=6$$

$$m=2$$

$$P_n(\mathrm{m})=\mathrm{C}_n^m\, p^m(1-p)^{n-m}=\mathrm{C}_6^2\, 0,2^2(1-0,2)^{6-2}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,04\cdot 0,8^4\approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m}\geq 1)=1-\mathrm{q}^n, q=1-p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$p=0,6 \Rightarrow \quad q=0,4$

$n=6$

$m \geq 1$

$P_6(\mathrm{m} \geq 1)=1-0,4^6 \approx 0,9959$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m}_1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{m}_2)=\sum_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$p=0,7$

$n=5$

$2 \leq m \leq 4$

$P_5(2 \leq m \leq 4)=\mathrm{C}_5^2 \cdot 0,7^2(1-0,7)^{5-2}+\mathrm{C}_5^3 \cdot 0,7^3(1-0,7)^{5-3}+\mathrm{C}_5^4 \cdot 0,7^4(1-0,7)^{5-4} \approx 0,801$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле $\begin{array}{l} np-q \leq m_0 \leq np+p \\ np-(1-p) \leq m_0 \leq np+p \end{array}$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$p=0,05$

$n=50$

$m_0-?$

$q=1-p=1-0,05=0,95$

$50 \cdot 0,05-0,95 \leq m_0 \leq 50 \cdot 0,05+0,05$

$1,55 \leq m_0 \leq 2,55$

$m_0=2$

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X=f\left(\omega_i\right)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X} - M(\mathrm{X}))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m \right)^2 p_i$$

$$D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X}^2) - (M(\mathrm{X}))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(\mathrm{X})}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(\mathrm{X}) = \mathrm{np} \quad D(\mathrm{X}) = \mathrm{npq}$$

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 = 0,2 + 2 + 2,4 + 1,8 = 6,4$$

$$M(\mathrm{X}^2) = 4 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 + 64 \cdot 0,3 + 81 \cdot 0,2 = 45,8$$

$$D(\mathrm{X}) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4,84} = 2,2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 100 \cdot 0,05 = 5$$

$$D(\mathrm{X}) = 100 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 4,75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4,75} = 2,18$$

Содержание практической работы

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.
2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?
3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.
6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.
7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?
8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?
9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна p. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.
10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?
11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Задание 4. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.
3. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4.Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появления события в этих испытаниях.

4. Контрольно-оценочные материалы для итоговой аттестации по учебной дисциплине

В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний, а также динамика формирования общих компетенций.

Оценка освоения учебной дисциплины осуществляется с использованием следующих форм и методов: фронтальный и индивидуальный опрос во время аудиторных занятий; контрольные и тестовые задания по темам учебной дисциплины; проведение практических работ.

Лист согласования

Дополнения и изменения к комплекту КОС на учебный год

Дополнения и изменения к комплекту КОС на __________ учебный год по дисциплине ____

В комплект КОС внесены следующие изменения:

____

____

____

____

____

Дополнения и изменения в комплекте КОС обсуждены на заседании ПЦК ____

«_____» ____________ 20_____г. (протокол № _______).

Председатель ПЦК ________________ /___________________/